

利用点扩展函数信息的变分图像去噪及增晰方法

姚 伟 孙即祥

(国防科学技术大学电子科学与工程学院,长沙 410073)

摘 要 基于偏微分方程(PDE)及变分法的图像去噪方法利用其数学特性得到了优于传统方法的结果,但很多模型只考虑了去噪的问题。通过对最小化凸能量函数模型引入点扩展函数信息,构造了具有去模糊效果的变分去噪模型,采用了 Kac̆anov 线性化方法进行求解,得到了更好的结果,实验结果及数据证明了模型的有效性。

关键词 变分法 点扩展函数 图像去噪 图像增晰

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)09-1796-06

A Variational Image De-noising and De-blurring Method Incorporating Point Spread Function Information

YAO Wei, SUN Ji-xiang

(College of Electrical Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract With superior mathematical characteristics, PDE and variational image de-noising methods achieve better results than traditional methods. Many models deal with de-noising problems only. A new variational model incorporating point spread function information was constructed to deal with de-noising and de-blurring problems concurrently. Ka ĉanov linearization technique was used to solve the new model. Experiments and related data proved the effectiveness of the model.

Keywords variational calculus, point spread function, image de-noising, image de-blurring

1 引 言

在很多实际应用中,获取的图像都是有一定程度的模糊并带有噪声的。基于偏微分方程(PDE)及变分法的方法在去噪的应用中取得了很大的成功。1987年,Perona等人提出P-M(Perona-Malik)方程^[1],1989年,Mumford等人提出M-S(Mumford-Shah)模型^[2]。P-M方程实质上是一种扩散率具有空间自适应性的(热)扩散方程,M-S模型则是通过最小化一个能量准则实现图像分割及图像质量的改善。之后出现了大量基于上述两种模型的分析、改进及应用实例^[3-5],直到近几年仍然有进行研究,如M-S模型的快速算法^[6],P-M算法中利用小波进行

系数计算等。Schnörr等人提出M-S模型的近似,新模型中能量泛函具有凸性,使得最小化问题在理论上具有唯一解^[7-8],Martin Welk等人结合Joachim Weickert的张量扩散率的扩散方程^[5]提出了结合点扩展函数(PSF)信息的新模型^[9],Leah Bar等人则在不同噪声情况下对模型进行了修改^[10-11]。

很多模型都是只考虑了图像含有噪声,而没有考虑到模糊因素(如散焦),这样如果应用以上模型就要再进行图像解卷积过程,而去噪的结果通常会对原图造成不同程度的失真,这种失真会在解卷积过程中得到放大,从而得到不好的处理结果,将去噪及去模糊同时进行处理是一种很好的解决方法。本文将点扩展函数(PSF)信息引入到基于PDE及变分法的图像增晰算法中以解决上述问题。

收稿日期:2008-04-17;改回日期:2008-07-15

第一作者简介:姚 伟(1981~),男。国防科学技术大学电子科学与工程学院博士研究生。主要研究方向为计算机视觉与智能信息处理。E-mail:yaowei_arthur@163.com

2 相关研究

2.1 P-M 方程

Perona 等人在文献[1]中提出如下非线性扩散模型进行图像质量改善:

$$\partial_t u = \text{div}(c(|\nabla u|)\nabla u) \quad (1)$$

其图像降质模型为

$$f = g + n \quad (2)$$

式中, f 为降质图像, g 为未降质图像, n 为加性高斯噪声, 求解结果 u 为对 g 的逼近. $c(\cdot)$ 为扩散率函数, 有多种取法, 如

$$c(s) = 1/(1 + s^2/\lambda^2), \lambda > 0 \quad (3)$$

由于 s 取为梯度模为非负, 所以式(3)为减函数, 即在边缘处扩散率小, 区域内部扩散率大, 所以虽然 P-M 方程在整个图像上都是在平滑, 但还能显示出边缘增强的效果. 理论上 P-M 方程的解的唯一性及稳定性得不到证明, 但数值计算的离散过程有潜在的正则化作用使得方程变得更稳定, 所以其实验结果比传统线性滤波有了很大改善.

2.2 M-S 模型

Mumford 等人在文献[2]中提出最小化下述能量泛函进行图像质量改善

$$E_f(u, K) = \beta \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \int_{\partial\Omega, K} |\nabla u|^2 dx + \alpha |K| \quad (4)$$

其采用的图像降质模型仍为式(2), u, f 意义同上, 参数 α, β 非负, Ω 为图像区域, K 为边界集, $|K|$ 为其 1 维 Hausdorff 测度, 给出了边界总长度. M-S 模型及很多变分模型中的泛函都包括 3 个代价函数项: 第 1 项为恢复图像 u 与原图像 f 的偏差, 第 2 项为恢复图像的平滑程度, 第 3 项为边缘代价函数项. 这种通过最小化能量泛函来进行图像分割的框架提供了比较不同分割算法的质量的标准. M-S 模型的很多后续改进在分割及增强中都有应用.

有关基于偏微分方程与基于变分法的图像增强/分割的算法的关系, 可以通过对 Nordström 提出的能量泛函的分析得到启示^[12-13]

$$E_f(u, w) = \iint_{\Omega} [\beta(u - f)^2 + w|\nabla u|^2 +$$

$$\lambda^2(w - \ln w)] dx dy \quad (5)$$

式中, u, f 意义同上, β 和 λ 为正参数, $w: \Omega \rightarrow [0, 1]$ 是一种边缘的模糊表示, 在区域内部, w 趋近于 1, 在边缘处, w 趋近于 0. 上述泛函的 Euler-Lagrange 方程为

$$\beta \cdot (u - f) - \text{div}(c(|\nabla u|)\nabla u) = 0 \quad (6)$$

式中, 系数 c 与式(3)形式一样. 这是方程

$$\partial_t u = \text{div}(c(|\nabla u|)\nabla u) + \beta(f - u) \quad (7)$$

的稳态解. 方程(7)为一反应扩散方程, 包括了 PM 方程和一偏移项 $\beta(f - u)$, 这使得方程最终迭代得出的解有意义. 这表明两种模型的关系是很密切的.

2.3 凸能量函数构造

M-S 模型出现以后得到广泛关注, 并有许多分析及改进成果, 但却一直缺少与理论相一致的数值方法. Schnörr 等人对能量函数提出如下近似:

$$E_f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((u - f)^2 + \lambda(|\nabla u|)) dx$$

$$\lambda(s) = \begin{cases} \lambda_h s^2 & 0 \leq s \leq c_p \\ \lambda_l^2 s^2 + c_\psi(2s - c_p) & s > c_p \end{cases} \quad (8)$$

式中 $c_\psi = (\lambda_h^2 - \lambda_l^2)c_p$, $\lambda_h \gg \lambda_l$, 参数 λ_l 为小的正常数, 以保证能量泛函的凸性, λ_h 决定了平滑的程度, c_p 则控制最小化过程中对信号变化的敏感程度. 这个模型相比 M-S 模型, 在数值计算方面要相对容易得多.

3 引入点扩展函数信息

上述模型都没有考虑模糊的因素, 在模型中引入点扩展函数信息将使得新模型可以进行图像恢复(去噪及解卷积). 对于凸能量函数模型, 引入 PSF 信息, 可得到如下能量函数

$$E_f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (h * u - f)^2 + \lambda(|\nabla u|) dx \quad (9)$$

式中, $\lambda(\cdot)$ 及其他参数均与式(8)意义相同, h 为点扩展函数. 模型修改的基础是假设降质图像与清晰图像的关系为

$$f = g * h + n \quad (10)$$

式中, f, g, n 意义同式(2), h 为降质过程点扩展函数, 这个模型具有很广的适用性。多数基于变分法的模型中偏差惩罚项均为 $(u - f)^2$, 这使得恢复图像 u 与降质图像 f 的偏差不会太大, 这在式(10)的模型下将得不到理想的结果, 式(9)中偏差惩罚项的修改使得恢复图像 u 逼近的是清晰图像 g 。

同时这一修改得到了图像去噪及图像解卷积的一步处理方法, 比先去噪, 再解卷积这种直接的分步方法会得到更好的结果。这是由于去噪过程不可能完全地去除噪声, 而且会引入一定的形变, 而解卷积是一个逆过程, 会放大这些不利因素, 本文方法则没有上述缺陷。能量函数的凸性使得数值求解方法一定可以收敛到唯一解, 随着实验条件(如噪声)的改变, 参数要求变化平缓, 这样就可以设计简单快速的数值算法。

4 数值算法

基于 PDE 算法大都采用有限差分法, 基于变分法的算法也都采用其 Euler-Lagrange 方程来求解。这里采用文献[8]中的迭代最小化方法来求解式(9), 其中积分在迭代中采用有限元法计算, 本文重点研究 Kačanov 线性化方法。

4.1 Kačanov 线性化方法

Kačanov 方法源于弹性理论, 通过线性化的迭代方法来求解非线性问题。对模型(8), Kačanov 线性化方法为

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^{k+1} v + \rho(|\nabla \mathbf{u}^k|) \nabla \mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

对于模型(9)则为

$$\int_{\Omega} \bar{h} * (\mathbf{u}^{k+1} * h - f) v + \rho(|\nabla \mathbf{u}^k|) \nabla \mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla v dx = 0 \quad (11)$$

式中, $\bar{h}(x, y) = h(-x, -y)$, $\rho(\cdot)$ 为 $\lambda(\cdot)$ 的导函数, v 为图像空间中任意变量。

4.2 离散化形式

首先采用如图 1 的方式来对图像区域进行三角剖分。

对每个节点指定一个基函数 $\phi_{i,j}$, $\phi_{i,j}$ 在每个三角区域内均为线性, 在节点 (i, j) 处值为 1, 其他节点处值为 0。 $\{\phi_{i,j}\}$ 构成了试探函数空间 H_h 的基底。将式(11)中的 v 用每个 $\phi_{i,j}$ 都替换一次, 得到

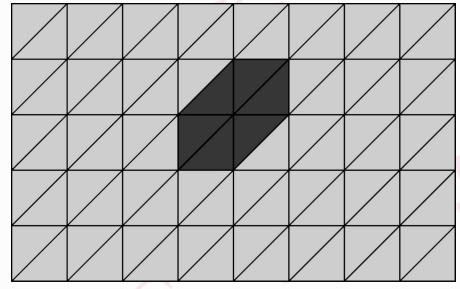


图 1 图像矩形的三角剖分方法及节点基函数支撑区域

Fig. 1 Triangulation of image rectangle and support region of basis function on one node

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n} \hat{u}_{m,n}^{k+1} \int_{\Omega} \phi_{m,n} \phi_{i,j} dx + \\ & \sum_{m,n} u_{m,n}^{k+1} \int_{\Omega} \rho(|\nabla \mathbf{u}_h^k|) \nabla \phi_{m,n} \cdot \nabla \phi_{i,j} dx \\ & = \sum_{m,n} \hat{f}_{m,n} \int_{\Omega} \phi_{m,n} \phi_{i,j} dx, \\ & 0 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq N-1 \quad (12) \end{aligned}$$

其中, $[M, N]$ 为图像大小, $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} * h * \bar{h}$, $\hat{f} = f * \bar{h}$ 。由于基函数为有限支撑, 所以式(12)中的积分结果均为有限维矩阵, 记

$$D_{2D}(m, n) = \int_{\Omega} \phi_{m,n} \phi_{i,j} dx,$$

$$R_{2D}(m, n) = \int_{\Omega} \rho(|\nabla \mathbf{u}_h^k|) \nabla \phi_{m,n} \cdot \nabla \phi_{i,j} dx$$

则式(12)可化为

$$\hat{\mathbf{u}}^{k+1} * D_{2D} + \mathbf{u}^{k+1} * R_{2D} = D_{2D} * \hat{f} \quad (13)$$

由于 R_{2D} 在每次迭代过程中都需要重新计算, 所以需要通过将式(13)转化为稀疏矩阵的方式来进行计算。将 $\hat{\mathbf{u}}, \hat{f}$ 逐行串接为矢量记为 $\hat{U}, \hat{F}, D_{2D}, R_{2D}$ 相应的形成了具有几条主对角线的大型矩阵, 记其相应的稀疏矩阵为 D, R , 则有

$$D \hat{U}^{k+1} + R U^{k+1} = D \hat{F} \quad (14)$$

稀疏线性方程的迭代求解方法可参考文献[15]。

4.3 黑边效应

在图像边界部分进行卷积时, 卷积核会部分覆盖到图像区域之外, 若采用补零的办法, 则会产生黑边效应, 在图像周围产生黑色边框。解决此问题的办法通常是采用不同的边界条件, 通常有 3 种:

(1) 对称边界条件: 以图像为周期信号的半个周期进行对称延拓;

(2) 边界值延拓: 使用边界处像素值填补周围区域;

(3)周期边界条件:以图像为周期信号的一个周期进行延拓;

条件(3)由于在边界处会引入不连续性,所以在一些特定的场合才会用到(如非对称卷积核^[9])。上述问题在稀疏矩阵生成的时候有类似的影响。在本文中卷积核大小为 3×3 ,采用边界条件(1)(或 2,在此情况下等价),稀疏矩阵生成示意图如图 2 所示。

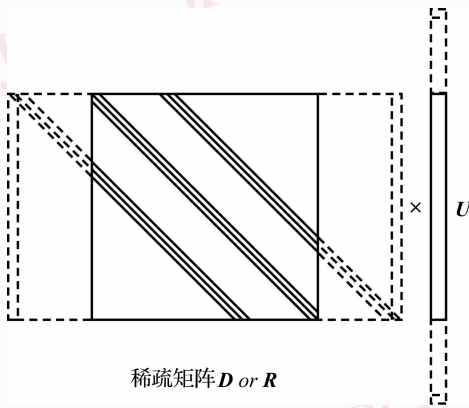


图 2 稀疏矩阵生成示意图

Fig. 2 The creation and modification of the sparse matrix

右部实线部分为图像传接成的向量,虚线部分分别为位置(1,1)的像素、第 1 行、最后一行与位置(M,N)的像素的扩展,这样保证了卷积转化为乘积时的等价性。由于左图部分虚线处的值实际上都是与边界像素相乘,所以只需要将这些值叠加在实线的相应部分。若不考虑这些修正,则会在处理后的图像中出现黑边效应,如图 3 所示。

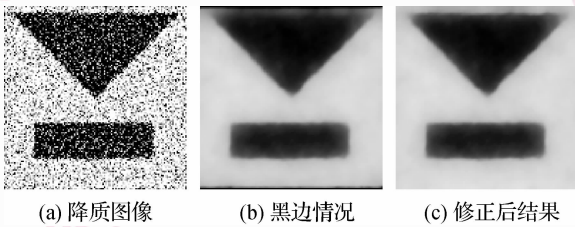


图 3 黑边效应示意图

Fig. 3 Demonstration of black border effect

4.4 引入 PSF 带来的问题

式(13)可以写为

$$u^{k+1} * h * \bar{h} * D_{2D} + u^{k+1} * R_{2D} = D_{2D} * f * \bar{h} \quad (15)$$

h 及 \bar{h} 以卷积的形式出现在式(15)中,同样带来边界的问题。若点扩展函数支撑域大,则图 2 中扩展

的区域还要增加。在式(15)中左边第 1 式转化为稀疏矩阵相乘时,应将 h, \bar{h} 与 D_{2D} 分别转化为稀疏矩阵,首先计算它们的卷积将得到更大的卷积核,使得问题变得复杂。

5 实验结果及分析

首先设计实验来说明将去噪及解卷积的过程分别进行会得到不理想的结果,如图 4 所示。

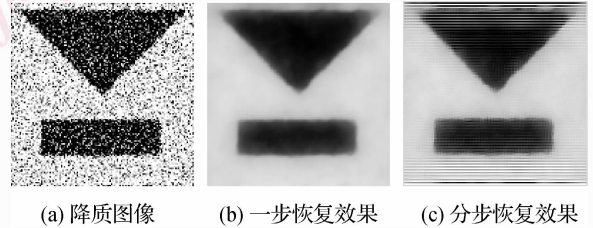


图 4 一步与分步图像恢复效果对比图

Fig. 4 The comparison of one step and two step image recovery

图 4(a)为经过方差为 0.7 的高斯函数模糊化并加入了方差为 0.2 的高斯噪声的降质图像,图 4(b)为本文同时进行去噪及解卷积的方法,图 4(c)为首先使用模型(8)去噪,然后利用 Wiener 滤波器进行图像恢复的结果。由于没有噪声的情况下 Wiener 滤波器相当于逆滤波器,而去噪过程不能完全的去掉噪声,且会引入一定的形变,这些因素被逆滤波的过程放大,得到类似图 4(c)的不理想结果。

本文算法对医学图像处理的效果如图 5 所示,对原图像进行了模糊处理,卷积核为 3×3 大小方差 0.7 的高斯函数,并添加了不同方差的高斯噪声,如图标注。参数值 $\lambda_h = 6.0$ 取固定值, c_p 对应不同方差噪声分别取 0.002, 0.007, 0.010, 0.015。由于噪声的增强,参数值也要相应的增加,以防止处理结果被噪声的波动所影响。

将本文算法与 Nordström 的变分模型^[12-13]进行了比较。对 Nordström 提出的变分能量泛函引入点扩展函数信息,得到

$$E_J(u, w) = \int_{\Omega} [\beta \cdot (u * h - f)^2 + w \cdot |\nabla u|^2 + \lambda^2 \cdot (w \cdot \ln w)] dx \quad (16)$$

推导其 Euler-Lagrange 方程,采用有限差分法求

解,如图 5 所示,参数 λ 的取值与 c_p 的规律类似,随着噪声的增加分别为 0.03, 0.05, 0.06, 0.065 (对梯度进行了平滑)。可以看出,随着噪声的增加,模型(16)的图像恢复能力相比模型(9)逐渐变弱。

还将本文结果与 Martin Welk 的算法^[9]进行了比较,如图 5 所示。其采用的能量函数为

$$E_f(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} ((h * \mathbf{u} - f)^2 + \alpha\psi(|\nabla \mathbf{u}|^2)) dx \tag{17}$$

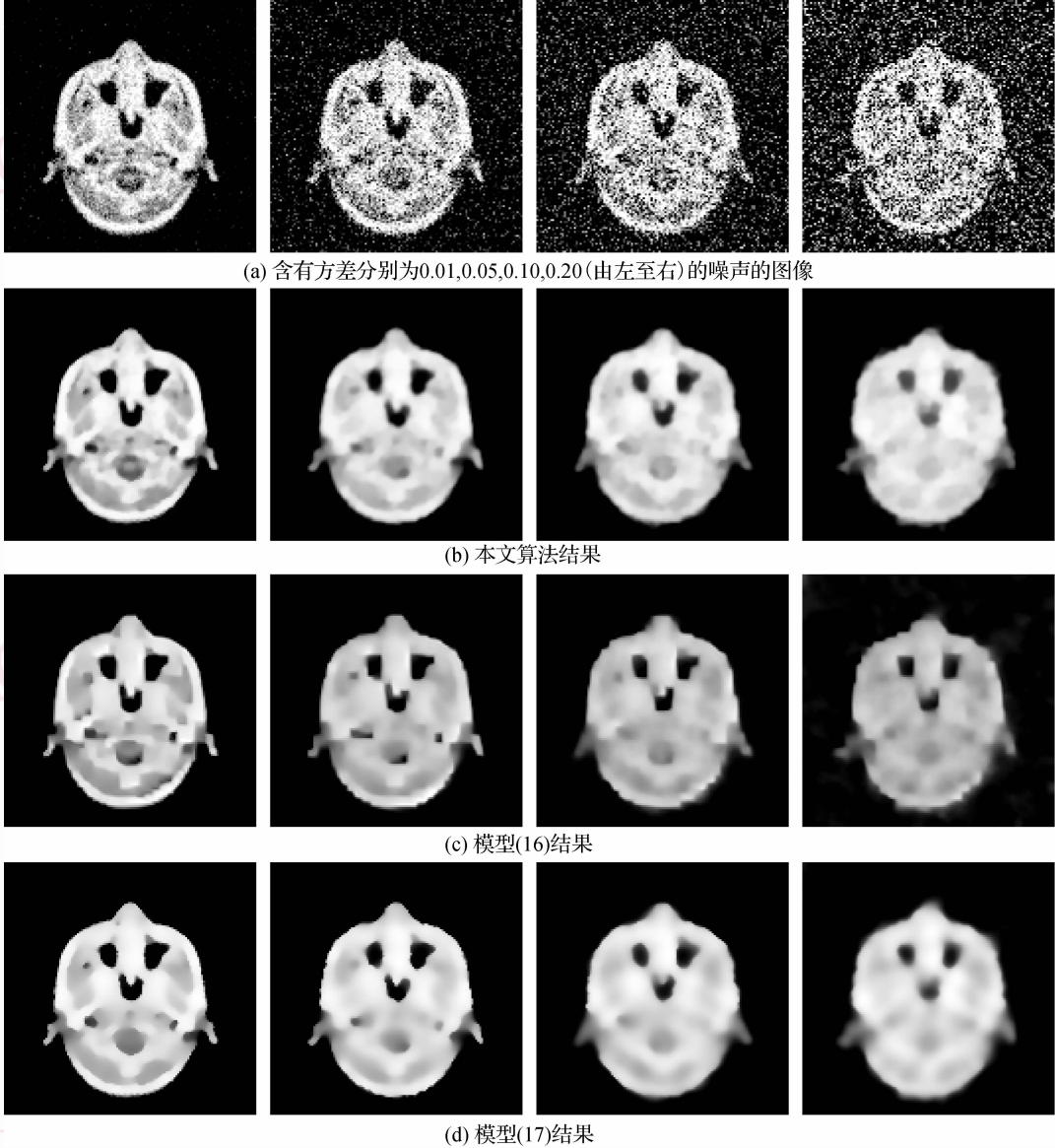


图 5 加入不同方差的噪声的医学图像处理结果及不同算法对比

Fig. 5 Experimental results of a medical image with different noise levels and different algorithms

迭代求解其 Euler-Lagrange 方程,即求解下式

$$\partial_i u = \alpha \text{div}(c(|\nabla u|^2) \nabla u) + \bar{h} * (f - h * u) \tag{18}$$

式中, c 为 ψ 的导函数,实验中取为式(3)的形式,对应参数取值随噪声增加分别为 0.04, 0.06, 0.08,

0.09 (未对梯度进行平滑)。采用有限差分法进行求解。通过实验结果可以看出,模型(17)滤除了较多细节,随着噪声的增大,去噪的结果越来越不理想。

计算了在不同程度噪声下 3 种结果的均方误差 (MSE)、峰值信噪比 (PSNR) 及结构相似度

(SSIM)^[16]对比,结果如表1~表4所示。这些结果也都验证了本文算法的有效性。

表1 噪声方差 0.01 结果对比

Tab.1 Results comparison of noise variance 0.01

	MSE	PSNR	SSIM
本文结果	0.009 1	40.838 2	0.754 4
模型(17)结果	0.011 1	39.109 3	0.726 6
模型(16)结果	0.028 3	30.968 9	0.552 0

表2 噪声方差 0.05 结果对比

Tab.2 Results comparison of noise variance 0.05

	MSE	PSNR	SSIM
本文结果	0.016 1	35.881 4	0.642 7
模型(17)结果	0.016 6	35.616 8	0.621 4
模型(16)结果	0.041 3	27.671 9	0.508 1

表3 噪声方差 0.10 结果对比

Tab.3 Results comparison of noise variance 0.10

	MSE	PSNR	SSIM
本文结果	0.022 0	33.153 5	0.582 1
模型(17)结果	0.024 4	32.250 7	0.560 5
模型(16)结果	0.049 0	26.185 7	0.491 6

表4 噪声方差 0.20 结果对比

Tab.4 Results comparison of noise variance 0.20

	MSE	PSNR	SSIM
本文结果	0.030 3	30.376 5	0.544 1
模型(17)结果	0.032 1	29.859 8	0.532 6
模型(16)结果	0.039 5	28.075 0	0.512 3

6 结论

成像过程中模糊、噪声的因素常常存在,去噪及增晰等图像预处理非常重要。本文提出一种同时进行图像去噪及解卷积的方法,方法在噪声污染很严重时,有较好表现。算法运行快速稳定,在2 GHz 512 M PC上处理128×128的图像,运行两个循环,约需18 s时间,即可得到较好结果,稳定性主要体现在能量函数的凸性上,迭代不会发散。稀疏矩阵的应用限制了处理图像的大小,稀疏矩阵的乘法、除法需要特殊设计算法才可以处理更大的图像,这是下一步的研究内容,同时点扩展函数不完全已知(如已知其形式,某些参数未知)及盲恢复也是值得研究的问题。

参考文献 (References)

- 1 Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion [A]. In: Proceedings of the IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision [C], Miami Beach, FL, USA, 1987: 16-22.
- 2 Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989, **42**:577-685.
- 3 Catté F, Lions P L, Morel J M, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion [J]. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) 1991, **29**(1):182-193.
- 4 Alvarez L, Guichard F, Lions P L, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (II) [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, **29**(3):845-866.
- 5 Joachim Weickert. Anisotropic Diffusion in Image Processing [D]. Copenhagen, Denmark: University of Copenhagen, 1996.
- 6 YU Lu, WANG Qiao, WU Le-nan, et al. Mumford-shah model with fast algorithm on lattice [A]. In: Proceedings of IEEE ICASSP [C], Toulouse, France, 2006, **2**: 681-684.
- 7 Schnörr C. A study of a convex variational diffusion approach for image segmentation and feature extraction [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 1998, **8**(3):271-292.
- 8 Heers J, Schnörr C, Stiehl H S. Globally-convergent iterative numerical schemes for non-linear variational image smoothing and segmentation on a multi-processor machine [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, **10**(6): 852-864.
- 9 Welk M, Theis D, Brox T, et al. PDE-based deconvolution with forward-backward diffusivities and diffusion tensors [A]. Scale-Space and PDE Methods in Computer Vision. Lecture Notes in Computer Science [C], Berlin Germany: Springer, 2005, **3459**: 585-597.
- 10 Bar L, Kiryati N, Sochen N. Image deblurring in the presence of impulsive noise [J]. International Journal of Computer Vision, 2006, **70**(3): 279-298.
- 11 Bar L, Brook A, Sochen N, et al. Deblurring of color images corrupted by impulsive noise [J]. IEEE Transactions on Image Process. 2007, **16**(4):1101-11.
- 12 Nordström N. Biased anisotropic diffusion-a unified regularization and diffusion approach to edge detection [A]. In: Proceedings of the first european conference on Computer vision [A], Antibes, France, 1990, **427**:18-27.
- 13 Nordström N. Biased anisotropic diffusion-a unified regularization and diffusion approach to edge detection [J]. Image Vision Comput, 1990, **8**: 318-327.
- 14 Liu Feng. Image diffusion filtering methods based on wavelet transform [J]. Science in China, Series E, 2006, **36**(6):668-677. [刘峰. 基于小波变换的图像扩散滤波方法. 中国科学 E 辑, 2006, **36**(6):668-677.]
- 15 Saad Yousef. Iterative Methods for Sparse Linear Equations [M]. Boston, MA, USA: PWS Publishing Company, 1996.
- 16 Zhou W, Alan C B, Hamid R S, et al. Image quality assessment: from error measurement to structural similarity [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, **13**(4):600-613.